5. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1, [x_0, y_0] = [1, 0]$

Implicitní funkce: Anulujme zadanou rovnici. Dostaneme: $2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1 = 0$. Zadefinujme funkci $F(x, y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1$. Nyní ověřme předpoklady věty 22. K ověření podmínky *(i)* spočtěme parciální derivace.

$$
\begin{aligned}
F'_x(x, y) &= 8x^3y + 3x^2 + y \\
F'_y(x, y) &= 2x^4 + 3y^2 + x
\end{aligned}
$$

Zřejmě tedy $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, neb má všechny parciální derivace spojité.

Dosazením snadno ověříme, že $F(x_0, y_0) = 0$. Zbývá tedy ověřit podmínku *(iii)*. Platí

$$F'_y(x_0, y_0) = F'_y(1, 0) = 2 \cdot 1^4 + 3 \cdot 0^2 + 1 = 3 \neq 0.$$

Podle věty 22 tedy existuje otevřené okolí $U \subset \mathbb{R}$ bodu 1 a $V \subset \mathbb{R}$ bodu 0 takové, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y = \varphi(x) \in V$ t.ž. $F(x, \varphi(x)) = 0$. Speciálně platí, že $\varphi(1) = 0$, neb bod $[x_0, y_0]$ splňuje, že $F(x, y) = 0$. Toho využijeme při výpočtu $\varphi'(x_0)$.

První derivace φ: Dle téže věty platí následující:

$$\varphi'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, \varphi(x_0))}{F'_y(x_0, \varphi(x_0))} = -\frac{F'_x(1, 0)}{F'_y(1, 0)} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Dále dle věty 21 platí následující.

$$
\begin{aligned}
F''_{x,y}(x, y) &= F''_{y,x}(x, y) = 8x^3 + 1 \\
F''_{x,x}(x, y) &= 24x^2y + 6x \\
F''_{y,y}(x, y) &= 6y
\end{aligned}
$$

Druhá derivace φ: Spočtěme $\varphi''(x_0)$. Zderivováním rovnosti $\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}$ dostaneme dle věty 20:

$$
\begin{aligned}
&\varphi''(x) = \frac{-1}{\left(F'_y(x, \varphi(x))\right)^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} F'_x(x, \varphi(x)) \cdot F'_y(x, \varphi(x)) - F'_x(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} F'_y(x, \varphi(x)) \right) \\
&\frac{\partial}{\partial x} F'_x(x, \varphi(x)) \overset{\text{V 20}}{=} F''_{xx}(x, \varphi(x)) + F''_{x,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\
&\frac{\partial}{\partial x} F'_y(x, \varphi(x)) \overset{\text{V 20}}{=} F''_{y,x}(x, \varphi(x)) + F''_{y,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)
\end{aligned}
$$

Dosadíme $[x_0, y_0]$.

$$\frac{\partial}{\partial x}F'_x(x_0,\varphi(x_0)) = F''_{xx}(1,0) + F''_{x,y}(1,0)\cdot\varphi'(1) = 6-9 = -3$$
$$\frac{\partial}{\partial x}F'_y(x_0,\varphi(x_0)) = F''_{y,x}(1,0) + F''_{y,y}(1,0)\cdot\varphi'(1) = 9$$
$$\varphi''(x_0) = \frac{-1}{9}(-3\cdot 3 - 3\cdot 9) = 4$$

Tečná nadrovina: křivka daná rovnicí $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$ je na okolí bodu $[x_0, y_0]$ grafem funkce φ. Dosadíme tedy derivaci φ do definici tečné nadroviny.

$T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\,(x - x_0) = 0 - 1\,(x-1)$.

$T(x)$ je y-ová souřadnice tečné nadroviny. Proto je tečná nadrovina ke křivce dané rovnicí $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$ v bodě $[1,0]$ dána rovnicí $y = 1 - x$

Trochu jiný výpočet derivací φ:

Derivace φ by se dala též spočítat takto:

Rovnost $F(x,\varphi(x)) = 0$ nám dává rovnici

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0.$$

Jejím zderivováním podle x dostaneme rovnici

$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0.$$

Upravujme.

$$\varphi'(x)\left(2x^4 + 3\varphi(x)^2 + x\right) = -8x^3\varphi(x) - 3x^2 - \varphi(x)$$
$$\varphi'(x) = -\frac{8x^3\varphi(x) + 3x^2 + \varphi(x)}{2x^4 + 3\varphi(x)^2 + x}$$

Do poslední rovnice dosadíme $\varphi(x_0) = 0, x_0 = 1$ a dostaneme $\varphi'(x_0) = -1$.

Zderivujme získaný vztah pro $\varphi'(x)$. Dostaneme:

$$A(x) := 8x^3\varphi(x) + 3x^2 + \varphi(x)$$
$$B(x) := 2x^4 + 3\varphi(x)^2 + x$$
$$A'(x) = 24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 6x + \varphi'(x)$$
$$B'(x) = 8x^3 + 6\varphi(x)\cdot\varphi'(x) + 1$$
$$\varphi''(x) = -\frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)}$$
$$A(x_0) = 3, A'(x_0) = -8 + 6 - 1 = -3$$
$$B(x_0) = 3, B'(x_0) = 9$$
$$\varphi''(x_0) = -\frac{-3\cdot 3 - 3\cdot 9}{9} = -\frac{-4\cdot 9}{9} = 4$$

Příklad 1 (c) $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1, [x_0, y_0] = [2, 0]$

Implicitní funkce: Anulujme rovnici a zaveďme funkci $F(x, y) = e^{xy} + \sin y + y^2 - 1$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= ye^{xy} \\ F'_y(x, y) &= xe^{xy} + \cos y + 2y \end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R}), F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) = 3 \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

První derivace φ: Do zadané rovnice za y dosadíme $\varphi(x)$, rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme $\varphi'(x)$.

$$\begin{aligned} &e^{x\varphi(x)} + \sin(\varphi(x)) + \varphi(x)^2 - 1 = 0 \\ &\big(\varphi(x) + x\varphi'(x)\big) e^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + 2\varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0 \\ &\varphi'(x) \Big(xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x) \Big) = -\varphi(x)e^{x\varphi(x)} \\ &\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x)e^{x\varphi(x)}}{xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x)} \\ &\varphi'(x_0) = \frac{-0 \cdot 1}{2 + 1 + 2 \cdot 0} = 0 \end{aligned}$$

Druhá derivace φ: Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\begin{aligned} &A(x) := \varphi(x)e^{x\varphi(x)} \\ &B(x) := xe^{x\varphi(x)} + \cos(\varphi(x)) + 2\varphi(x) \\ &A'(x) = \varphi'(x)e^{x\varphi(x)} + \varphi(x) \big(\varphi(x) + x \cdot \varphi'(x)\big) e^{x\varphi(x)} \\ &B'(x) = e^{x\varphi(x)} + x \big(\varphi(x) + x\varphi'(x)\big) e^{x\varphi(x)} - \sin(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + 2\varphi'(x) \\ &\varphi''(x) = -\frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} \\ &A(x_0) = 0, A'(x_0) = 0 \\ &B(x_0) = 3, B'(x_0) = 1 \\ &\varphi''(x_0) = \frac{0}{9} = 0 \end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$y = T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Příklad 1 (d) $\sin(xy) + \cos(xy) = 1, [x_0, y_0] = [\pi, 0]$

Implicitní funkce: Anulujme rovnici a zaveďme funkci $F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$\begin{aligned} F'_x(x,y) &= y\cos(xy) - y\sin(xy) \\ F'_y(x,y) &= x\cos(xy) - x\sin(xy) \end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R}), F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) = \pi \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

První derivace φ: Do zadané rovnice za y dosadíme $\varphi(x)$, rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme $\varphi'(x)$.

$$\begin{aligned} &\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) - 1 = 0 \\ &\cos(x\varphi(x)) \cdot \big(\varphi(x) + x\varphi'(x)\big) - \sin(x\varphi(x)) \cdot \big(\varphi(x) + x\varphi'(x)\big) = 0 \\ &\varphi'(x)\left(x\cos\left(x\varphi(x)\right) - x\sin\left(x\varphi(x)\right)\right) = \varphi(x)\left(\sin\left(x\varphi(x)\right) - \cos\left(x\varphi(x)\right)\right) \\ &\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)\left(\sin\left(x\varphi(x)\right) - \cos\left(x\varphi(x)\right)\right)}{x\cos\left(x\varphi(x)\right) - x\sin\left(x\varphi(x)\right)} \\ &\varphi'(x_0) = \frac{0}{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Druhá derivace φ: Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\begin{aligned} &A(x) := \varphi(x)\left(\sin\left(x\varphi(x)\right) - \cos\left(x\varphi(x)\right)\right) \\ &B(x) := x\cos\left(x\varphi(x)\right) - x\sin\left(x\varphi(x)\right) \\ &A'(x) = \varphi'(x)\left(\sin\left(x\varphi(x)\right) - \cos\left(x\varphi(x)\right)\right) + \varphi(x)\big(\varphi(x) + x\varphi'(x)\big)\left(\cos\left(x\varphi(x)\right) - \sin(x\varphi(x))\right) \\ &B'(x) = \cos(x\varphi(x)) - \sin(x\varphi(x)) + x\big(\varphi(x) + x\varphi'(x)\big)\left(-\sin(x\varphi(x)) - \cos(x\varphi(x))\right) \\ &\varphi''(x) = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} \\ &A(x_0) = 0, A'(x_0) = 0 \\ &B(x_0) = \pi, B'(x_0) = 1 \\ &\varphi''(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$y = T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\left(x - x_0\right) = 0$$

Příklad 1 (e) $\log(x^2+y^2+\cos(xy))+y=0, [x_0,y_0]=[0,0]$

Implicitní funkce: Zaveďme funkci $F(x,y)=\log(x^2+y^2+\cos(xy))+y$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$F'_x(x,y)=\frac{2x-y\sin(xy)}{x^2+y^2+\cos(xy)}$$
$$F'_y(x,y)=\frac{2y-x\cos(xy)}{x^2+y^2+\cos(xy)}+1$$

Zřejmě $F\in C^1(G)$, kde je dostatečně malé ot. okolí počátku,$F(x_0,y_0)=0$ a $F'_y(x_0,y_0)=1\neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0,y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0)=y_0$.

První derivace φ: Do zadané rovnice za y dosadíme $\varphi(x)$, rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme $\varphi'(x)$.

$$\log\left(x^2+\varphi(x)^2+\cos\left(x\varphi(x)\right)\right)+\varphi(x)=0$$
$$\frac{2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin\left(x\varphi(x)\right)\left(\varphi(x)+x\varphi'(x)\right)}{x^2+\varphi(x)^2+\cos\left(x\varphi(x)\right)}+\varphi'(x)=0$$
$$\varphi'(x)\left(x^2+\varphi(x)^2+\cos\left(x\varphi(x)\right)+2\varphi(x)-x\sin(x\varphi(x))\right)=-2x+\sin(x\varphi(x))\varphi(x)$$
$$\varphi'(x)=\frac{-2x+\sin(x\varphi(x))\varphi(x)}{x^2+\varphi(x)^2+\cos\left(x\varphi(x)\right)+2\varphi(x)-x\sin(x\varphi(x))}$$
$$\varphi'(x_0)=0$$

Druhá derivace φ: Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$A(x):=-2x+\sin(x\varphi(x))\varphi(x)$$
$$B(x):=x^2+\varphi(x)^2+\cos\left(x\varphi(x)\right)+2\varphi(x)-x\sin(x\varphi(x))$$
$$\varphi''(x)=\frac{A'(x)B(x)-A(x)B'(x)}{B^2(x)}$$
$$A'(x)=-2+\cos\left(x\varphi(x)\right)\left(\varphi(x)+x\varphi'(x)\right)\varphi(x)+\sin\left(x\varphi(x)\right)\varphi'(x)$$
$$A'(x_0)=-2$$
$$A(x_0)=0$$
$$B(x_0)=1$$
$$\varphi''(x_0)=\frac{-2\cdot 1-0}{1^2}=-2$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$y=T(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)\left(x-x_0\right)=0$$

Příklad 1 (j) $e^{\sin x^2} + e^{\sin(xy)} = 2y + 2, [x_0, y_0] = [0, 0]$

Implicitní funkce: Anulujme rovnici a zaveďme funkci $F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin(xy)} - 2y - 2$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$
\begin{aligned}
F'_x(x, y) &= 2x\cos(x^2)e^{\sin x^2} + y\cos(xy)e^{\sin(xy)} \\
F'_y(x, y) &= x\cos(xy)e^{\sin(xy)} - 2
\end{aligned}
$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R}), F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) = -2 \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0) = y_0$.

První derivace φ: Dle věty 22 platí následující.

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))} \\
\varphi'(x_0) &= -\frac{0 + 0}{0 - 2} = 0
\end{aligned}
$$

Druhá derivace φ: Zderivujme předchozí vztah pro $\varphi'(x)$ podle věty 20 a 21.

$$
\begin{aligned}
&\varphi''(x) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}F'_x(x, \varphi(x)) \cdot F'_y(x, \varphi(x)) - F'_x(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}F'_y(x, \varphi(x))}{\left(F'_y(x, \varphi(x))\right)^2} \\
&F''_{x,x}(x, y) = e^{\sin x^2}\left(2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) + 4x^2\cos^2(x^2)\right) + e^{\sin(xy)}\left(y^2\cos^2(xy) - y^2\sin(xy)\right) \\
&F''_{x,y}(x, y) = F''_{y,x} = \cos(xy)\, e^{\sin(xy)} + x\left(-y\sin(xy)e^{\sin(xy)} + y\cos^2(xy)e^{\sin(xy)}\right) \\
&F''_{y,y}(x, y) = x\left(-x\sin(xy)e^{\sin(xy)} + x\cos^2(xy)e^{\sin(xy)}\right) \\
&\frac{\partial}{\partial x}F'_x(x, \varphi(x)) = F''_{x,x}(x, \varphi(x)) + F''_{x,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\
&\frac{\partial}{\partial x}F'_y(x, \varphi(x)) = F'_{y,x}(x, \varphi(x)) + F''_{y,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\
&F''_{x,x}(x_0, \varphi(x_0)) = 2 \\
&F''_{x,y}(x_0, \varphi(x_0)) = F''_{y,x}(x_0, \varphi(x_0)) = 1 \\
&F''_{y,y}(x_0, \varphi(x_0)) = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial x}F'_x(x_0, \varphi(x_0)) = 2 \\
&\frac{\partial}{\partial x}F''_y(x_0, \varphi(x_0)) = 1 \\
&\varphi''(x_0) = -\frac{2 \cdot (-2) - 0 \cdot 1}{(-2)^2} = -\frac{-4}{4} = 1
\end{aligned}
$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$
y = T(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) = 0
$$

Příklad 2 (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9, [x_0, y_0, z_0] = [1, -2, 1]$

Implicitní funkce: Anulujme rovnici a zaveďme funkci $F(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$\begin{aligned}
F'_x(x,y,z) &= 2x + y \\
F'_y(x,y,z) &= 4y + x \\
F'_z(x,y,z) &= 6z - 1
\end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R}), F(x_0,y_0,z_0) = 0$ a $F'_z(x_0,y_0,z_0) = 5 \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0,y_0,z_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0,y_0) = z_0$.

Derivace φ: Do zadané rovnice za z dosadíme $\varphi(x,y)$, rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme $\varphi'_x(x,y)$. Pak rovnici zderivujeme podle y a vyjádříme $\varphi'_y(x,y)$.

$$\begin{aligned}
&x^2 + 2y^2 + 3\varphi(x,y)^2 + xy - \varphi(x,y) - 9 = 0 \\
&2x + 6\varphi(x,y)\varphi'_x(x,y) + y - \varphi'_x(x,y) = 0 \\
&\varphi'_x(x,y) = \frac{-2x - y}{6\varphi(x,y) - 1} \\
&\varphi'_x(x_0,y_0) = \frac{-2+2}{6\cdot 1 - 1} = 0 \\
&4y + 6\varphi(x,y)\varphi'_y(x,y) + x - \varphi'_y(x,y) = 0 \\
&\varphi'_y(x,y) = \frac{-4y - x}{6\varphi(x,y) - 1} \\
&\varphi'_y(x_0,y_0) = \frac{8-1}{5} = \frac{7}{5}
\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$T(x,y) = \varphi(x_0,y_0) + \varphi'_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + \varphi'_y(x,y)(y - y_0) = 1 + 0 + \frac{7}{5}(y+2)$$

Příklad 2 (c) $\sin(yz) = \frac{x}{z}, [x_0,y_0,z_0] = [1, \frac{\pi}{2}, 1]$

Implicitní funkce: Anulujme rovnici a zaveďme funkci $F(x,y,z) = \sin(yz) - \frac{x}{z}$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$\begin{aligned}
F'_x(x,y,z) &= -\frac{1}{z} \\
F'_y(x,y,z) &= z\cos(yz) \\
F'_z(x,y,z) &= y\cos(yz) + \frac{x}{z^2}
\end{aligned}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R}), F(x_0,y_0,z_0) = 0$ a $F'_z(x_0,y_0,z_0) = 1 \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Derivace φ: Podle věty 22 platí následující.

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)}{F'_z\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)} = -\frac{-1}{1} = 1$$
$$\varphi'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)}{F'_z\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)} = -\frac{0}{1} = 0$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$T(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 1 + (x - 1) + 0 = x$$

Příklad 2 (d) $-e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = e^{xyz}, [x_0, y_0, z_0] = [0, 2, 0]$

Implicitní funkce: Anulujme rovnici a zaveďme funkci $F(x, y, z) = -e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} - e^{xyz}$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$F'_x(x, y, z) = -ye^{xy} + ze^{xz} - yze^{xyz}$$
$$F'_y(x, y, z) = -xe^{xy} + ze^{yz} - xze^{xyz}$$
$$F'_z(x, y, z) = ye^{yz} + xe^{xz} - xye^{xyz}$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R}), F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 2 \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Derivace φ: Podle věty 22 platí následující.

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)}{F'_z\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)} = -\frac{-2}{2} = 1$$
$$\varphi'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)}{F'_z\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)} = -\frac{0}{2} = 0$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$T(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 + 1(x - 0) + 0(y - 2) = x$$

Příklad 2 (e) $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}, [x_0, y_0, z_0] = [0, 1, 1]$

Implicitní funkce: Anulujme rovnici a zaveďme funkci $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \log \frac{z}{y}$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$
\begin{aligned}
F'_x(x, y, z) &= \frac{1}{z} \\
F'_y(x, y, z) &= \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y^2} = \frac{1}{y} \\
F'_z(x, y, z) &= -\frac{x}{z^2} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y} = \frac{-x - z}{z^2}
\end{aligned}
$$

Zřejmě $F \in C^1(\mathbb{R}), F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) = -1 \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Derivace φ: Podle věty 22 platí následující.

$$
\begin{aligned}
\varphi'_x(x_0, y_0) &= -\frac{F'_x\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)}{F'_z\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)} = -\frac{1}{-1} = 1 \\
\varphi'_y(x_0, y_0) &= -\frac{F'_y\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)}{F'_z\left(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)\right)} = -\frac{1}{-1} = 1
\end{aligned}
$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$
T(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 1 + (x - 0) + (y - 1)
$$